

Du manichéisme intellectuel.

Rudolf Bkouche

Le manichéisme rassure, c'est ce qui fait sa force. Parmi ses manifestations, nous en citerons deux qui relèvent de ce que l'on peut appeler un manichéisme intellectuel, d'une part la classique opposition "théorie vs pratique", avec les diverses variantes données aux termes "théorie" et "pratique", d'autre part l'opposition "sens vs techniques", opposition qui constitue aujourd'hui le matériau d'un débat sur l'enseignement qui, sous une apparence de cohérence, permet d'éviter la question de l'appréhension des connaissances c'est-à-dire la question même de l'enseignement.

Il faut ajouter pour comprendre la prégnance de ces oppositions que ce manichéisme intellectuel cache un manichéisme plus classique, celui de la lutte du Bien contre le Mal, encore que dans ce cas Bien et Mal peuvent s'échanger en fonction des idéologies.

Nous nous intéressons ici à l'opposition "sens vs techniques" d'abord parce c'est elle qui est avancée dans le débat actuel sur l'apprentissage, ensuite parce qu'elle s'appuie sur des confusions qui portent sur chacun des termes "sens" et "technique". Quant à l'opposition "théorie vs pratique", nous y reviendrons dans un texte ultérieur.

Sens vs techniques

On pourrait commencer par citer l'invention de l'opposition "sens vs déchiffrage" dans l'apprentissage de la lecture tant cette opposition semble inane. En effet, en mettant en avant le sens des mots au détriment du déchiffrage, on propose aux élèves de reconnaître les mots avant de les lire, la lecture n'étant que la connaissance de cette reconnaissance. Mais comment reconnaît-on les mots ? par leur forme peut-on dire, et il s'agit ici de leur forme visuelle, mais en quoi la forme d'un mot dit-elle son sens ? On n'a donc pas avancé par rapport au déchiffrage, mais on a compliqué le problème ; alors que le déchiffrage permet de relier, suivant des règles précises, les assemblages de lettres (les syllabes) et les sons, les graphèmes et les phonèmes comme disent les linguistes, on renvoie à une appréhension globale d'une forme en oubliant le fait que l'invention de l'alphabet permet de soulager la mémoire. Quant au sens, terme polysémique s'il en est, il faut distinguer entre le sens des mots et le sens du déchiffrage : le sens du "b-a-ba" est que lorsque la lettre b est suivie de la lettre a, on prononce "ba". Quant à l'accès au sens des mots écrits, il s'appuie dans un premier temps sur la lecture à voix haute¹. En fait, les "modernistes" qui distinguent, d'une façon aussi prétentieuse qu'imbécile, voie directe et voie indirecte² renvoient l'élève quelques millénaires en arrière, avant l'invention de l'écriture alphabétique. Mais je n'en dirai pas plus, renvoyant à un excellent article de Colette Ouzilou sur le sujet³.

J'en viens ensuite aux mathématiques avec la fameuse opposition "résolution de problèmes vs techniques de calcul". Depuis la fin de la réforme des mathématiques, pédagogues et didacticiens se complaisent à proclamer : "*faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes*", phrase ambiguë s'il en est. D'abord parce qu'il s'agit de problèmes de mathématiques, ce qui suppose que l'on ait défini ce qu'est un problème de mathématiques, ensuite parce qu'il ne

¹La lecture à voix haute est un moment important de l'apprentissage de la lecture et la passage à la lecture non prononcée marque un premier achèvement de cet apprentissage.

²On distingue, dans les milieux bien-pensants du pédagogisme, deux modes d'accès à la lecture, la voie directe, laquelle suppose que le lecteur "*dispose déjà dans sa mémoire d'une image orthographique du mot*" et la voie indirecte, c'est-à-dire le déchiffrage. Cette distinction est une façon de légitimer les méthodes dites "globales". Il est intéressant de noter que c'est la voie directe que l'on appelle "lecture courante". (cf. *Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?* (programmes 2005-2006), CNDP/XO Editions, Paris 2005, p. 69)

³Colette Ouzilou, "Ce qu'apprendre à lire veut dire", in *L'école en France* (crises, pratiques, perspectives), sous la direction de Jean-Pierre Terrail, "état des lieux", La Dispute, Paris 2005, p. 197-212

suffit pas de poser un problème pour savoir le résoudre. On confond ici l'attitude du mathématicien⁴ qui rencontre un problème qu'il va tenter de résoudre en s'appuyant d'abord sur ce qu'il connaît et si nécessaire inventer des méthodes nouvelles de résolution et l'attitude d'un élève qui va s'appuyer sur ce qu'il sait pour résoudre les problèmes qu'on lui a posés⁵. Mais c'est cette distinction même que certains voudraient remettre en question, l'élève serait un apprenti chercheur auquel il faut poser des problèmes ouverts lui donnant ainsi la possibilité d'inventer ses procédures personnelles pour le résoudre ; cela devrait permettre à l'élève de manifester son inventivité et, pour reprendre un terme à la mode, sa créativité. On nage en plein délire. Pour inventer, il faut s'appuyer sur ce que l'on sait, y compris pour inventer des solutions qui s'écartent de ce que l'on connaît. La liberté d'inventer n'existe que pour celui qui dispose déjà d'un savoir constitué et qui est capable autant de s'en servir que de s'en écarter pour résoudre les problèmes auxquels il est confronté⁶.

Il ne saurait donc être question ni d'enseigner des techniques avec l'espoir que les élèves qui les ont apprises sauront s'en servir pour résoudre des problèmes, ni de poser des problèmes en espérant que les élèves comprendront mieux les techniques de calcul qui permettent de les résoudre. Ces deux cas extrêmes ne sont qu'une façon de ne pas poser la question de l'enseignement et il est inutile de les prendre en compte. Par contre il importe de voir comment problèmes et techniques de calcul s'articulent, ce qui conduit à les rendre concomitants dans l'enseignement.

On peut commencer par poser la question : "*qu'est-ce qu'un nombre*⁷ ?" et nous rappelons cette phrase souvent rencontrée dans d'anciens ouvrages de l'enseignement primaire : "*on sait ce qu'est un nombre*", phrase qui déchaînait l'ire des didacticiens. On sait ce qu'est un nombre dès que l'on sait compter ; c'est dire que la notion de nombre s'acquiert *via* le comptage et se précise au fur et à mesure que l'on apprend à compter. Pas besoin de s'appesantir sur cette pratique, si ce n'est l'apprentissage de la numération sous ses diverses formes et la découverte du fait que la suite des nombres ne s'arrête pas. On peut donc considérer qu'un élève de l'enseignement primaire sait ce qu'est un nombre dès lors qu'il sait compter ; c'est plus tard qu'il comprendra que la notion de nombre pose des problèmes difficiles et qu'il pourra, s'il le désire ou s'il en a besoin, se plonger dans la lecture de Frege⁸ et Dedekind⁹, qu'il comprendra aussi les polémiques mathématiques et philosophiques qui se développent autour d'une notion qu'il pensait connaître¹⁰.

Après le comptage, nous aborderons le calcul et par conséquent les techniques de calcul. On peut considérer le calcul comme un prolongement du comptage, ce qui conduit à définir des méthodes simples de comptage¹¹ et les techniques de calcul correspondantes. De même qu'il est impossible de distinguer l'apprentissage du comptage et l'apprentissage de la notion de

⁴Lorsque nous parlons de mathématicien, nous pensons autant au chercheur en mathématiques censé faire avancer la science mathématique qu'à l'utilisateur de mathématiques. Ceci renvoie au caractère flou de la frontière entre mathématiques dites pures et mathématiques dites appliquées, mais ce n'est pas ici le lieu d'aborder cette question.

⁵Autre distinction entre le travail du mathématicien et celui de l'élève apprenant les mathématiques, le mathématicien travaille sur les problèmes qu'il rencontre dans sa pratique professionnelle alors que l'élève doit répondre à des problèmes qui lui sont *a priori* extérieurs. On a trop oublié que l'enseignement a pour objectif de transmettre aux élèves un savoir qu'ils ne connaissent pas et d'amener chaque élève à faire sien ce savoir.

⁶On pourrait dire, de façon imagée, que pour sortir des sentiers battus, il faut les avoir parcourus.

⁷Il s'agit ici des nombres entiers dits aussi naturels.

⁸Gottlob Frege, *Les fondements de l'arithmétique* (1884), traduction et introduction de Claude Imbert, "L'ordre philosophique", Editions du Seuil, Paris 1969

⁹Richard Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers* (Continuity and Irrational Numbers, The Nature and Meaning of Numbers) (...), Authorized Translation by Wooster Woodruff Beman (1901), Dover Publications Inc., New York 1963

¹⁰.....

¹¹Ainsi l'addition est une façon de compter le nombre d'objets de deux collections mises ensemble.

nombre, il ne saurait être question de distinguer l'apprentissage du calcul et l'apprentissage des techniques de calcul. On a ici un premier exemple de concomitance.

Si le comptage et le calcul s'appuient sur des problèmes, ces problèmes exigent, dès qu'ils sont posés, la mise en place de techniques de calcul sans lesquelles on ne saurait résoudre ces problèmes. On peut ici encore parler de concomitance.

L'enseignement dit traditionnel le savait et fabriquait des progressions respectant cette concomitance. C'est cette concomitance qui conduit à la nécessité d'apprendre tables d'addition et tables de multiplication, d'autant que l'apprentissage du calcul montre comment se construisent ces tables.

Le problème est moins celui d'un enseignement traditionnel qui n'a jamais existé¹² que celui qui a été posé par la réforme dite des mathématiques modernes. Sous prétexte que, sur le plan structural, les opérations arithmétiques sont des lois de composition, on a voulu les définir comme telles aux élèves. La notion de loi de composition, se situant dans le cadre de la théorie des ensembles, est indépendante des pratiques de calcul ; mais cette notion ne relève pas de l'enseignement élémentaire¹³. C'est donc moins les opérations arithmétiques qui sont en cause que la forme ensembliste que leur avait donnée la réforme des mathématiques modernes. On peut considérer alors que le discours sur le "concret" qui s'est développé lors de la contre-réforme a conduit, non seulement à rejeter la réforme, mais à refuser de prendre en compte la concomitance signalée ci-dessus. Puisque la réforme avait tué cette concomitance en définissant les opérations arithmétiques rebaptisées lois de composition indépendamment des problèmes, on renversait l'ordre plaçant, au nom d'une idéologie du "concret", les problèmes avant les opérations. Ainsi l'enseignement oscillait entre deux extrêmes au nom de considérations moins pédagogiques qu'idéologiques. Il fallait cependant, pour légitimer cet enseignement, construire des "théories pédagogiques" *ad hoc*, ce qu'a fait la didactique des mathématiques. On ne peut oublier que celle-ci est née de la réforme des mathématiques modernes dont Piaget fut le grand maître et que, prenant en compte l'échec de cette réforme, elle s'est efforcée d'adapter avec plus ou moins de bonheur (plutôt moins que plus) le discours piagétien à la contre-réforme. Aujourd'hui s'y ajoute la fascination devant l'informatique, point sur lequel nous reviendrons.

La connaissance des règles de calcul n'est pas un ajout à la connaissance du calcul, ces règles participent de la connaissance du calcul et par cela même des nombres. En voici quelques exemples.

D'abord les règles de divisibilité, lesquelles consistent à savoir si un nombre donné est divisible par un second nombre donné et dans le cas contraire à déterminer le reste de la division du premier par le second. Une première méthode consiste à effectuer la division, mais la paresse propre aux mathématiciens a conduit ces derniers à vouloir répondre à la question sans effectuer cette division. Sans avoir besoin de développer la théorie générale de la divisibilité, laquelle relève de l'enseignement universitaire, on peut montrer des critères simples de divisibilité par 2, 5, 3, 9 qui s'appuient sur la seule connaissance de l'addition et de la multiplication. Ensuite la réduction des fractions qui consiste à chercher un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

¹²Rappelons que ce que l'on appelle *l'enseignement traditionnel* renvoie à un "avant" indifférencié que l'on oppose au "présent", comme si le présent ne puisait pas dans le passé, comme si le moderne était une construction *ex nihilo*. En ce sens l'enseignement traditionnel est une réinvention permanente permettant d'alimenter sans cesse une *querelle des Anciens et des Modernes*, entre ceux qui défendent une tradition en perpétuel changement et ceux qui défendent une modernité devenue anhistorique.

¹³Il n'est pas question de rejeter le point de vue ensembliste et la notion de loi de composition, lesquels jouent un rôle important dans les mathématiques contemporaines. Mais le point de vue ensembliste ne relève pas des mathématiques élémentaires et n'a pas sa place à l'école et au collège. Peut-être peut-on l'aborder au lycée, mais nous nous contentons de poser la question sans prendre position.

Enfin l'addition des fractions qui exige de trouver un multiple commun aux dénominateurs. On peut évidemment se contenter d'effectuer le produit des dénominateurs, mais une fois encore, la paresse exige de trouver un multiple commun plus petit.

Cela nous conduit à la notion de nombres premiers et à la décomposition en facteurs premiers. Je ne sais à quel moment cela peut être enseigné, mais on peut considérer qu'un élève de fin de collège doit connaître ces questions. Pour les étudier il suffit de savoir faire des additions et des multiplications.

Pour terminer ces remarques, j'énoncerai un problème dont on doit pouvoir donner la solution à des élèves de collège.

On sait que 2 n'est pas le carré d'une fraction. Comment peut-on montrer cela au collège ? Il existe une démonstration simple qui s'appuie essentiellement sur la propriété suivante : *le chiffre des unités du produit de deux nombres pairs (resp. impairs) est pair (resp. impair)*. Cette propriété est conséquence de l'algorithme de multiplication. Il s'ensuit qu'un nombre et son carré ont même parité.

Soit alors une fraction p/q dont le carré est 2. On peut supposer cette fraction irréductible, il s'ensuit que l'un au moins des nombres p ou q est impair.

Par hypothèse $p^2 = 2q^2$, ce qui prouve que p^2 est pair et par conséquent p est pair. On peut donc écrire $p = 2p'$ et par conséquent $2p'^2 = q^2$ ce qui montre que q^2 est pair et par conséquent q est pair. Ainsi p et q sont pairs ce qui est incompatible avec le fait que la fraction p/q est irréductible.

On a donc une démonstration simple d'une propriété profonde : il n'existe pas de fraction dont le carré soit égal à 2. Cette démonstration, premier exemple d'une démonstration par l'absurde, repose sur la connaissance de l'algorithme de multiplication et sur le fait qu'on peut toujours trouver une fraction irréductible à une fraction donnée.

Les remarques précédentes montrent combien la connaissance des techniques de calcul participe de la connaissance des nombres et qu'on ne saurait les séparer de l'enseignement du calcul.

Puisque l'on parle de sens, et il est important de parler du sens de ce que l'on enseigne, il faut alors prendre en compte que sens et techniques ne sont pas séparés et que, sans s'appuyer sur des techniques précises de calcul, la question du sens des nombres et du calcul est vide. C'est parce que l'on compte et que l'on calcule que l'on comprend ce qu'est un nombre et c'est parce que l'on sait ce qu'est un nombre que l'on peut calculer, c'est-à-dire connaître des techniques de calcul, ce qui renvoie à la concomitance définie ci-dessus. C'est seulement après-coup, que l'on peut distinguer la part conceptuelle et la part technique de l'activité mathématique.

La question des automatismes

Faut-il, au nom de l'intelligence, rejeter les automatismes ? Posée comme cela, cette question participe du manichéisme intellectuel : d'un côté un enseignement stupide d'acquisition d'automatismes qui ne sont en fin de compte qu'une forme de soumission au maître, de l'autre la force de l'intelligence de l'élève. Ici encore le manichéisme intellectuel cache une forme sournoise de moralisme.

Mais la question n'est pas d'opposer la belle intelligence aux méchants automatismes, elle est de regarder quelle est le rôle des automatismes dans la pratique d'une activité donnée, lecture, calcul ou autre. L'acquisition d'automatismes est un objectif important de l'apprentissage d'une technique. Sans cette acquisition, on reste un éternel débutant et l'on ne peut aller loin dans la connaissance.

Si on revient au cas de la lecture, c'est parce que l'on a acquis les automatismes du déchiffrage que l'on peut pratiquer la lecture courante et lire des textes de plus en plus difficiles.

Quant au calcul, c'est parce que l'on a acquis les automatismes que constituent les tables d'addition et de multiplication que l'on peut effectuer des calculs de plus en plus complexes et résoudre des problèmes difficiles.

Lorsque l'on dit que l'un des objets de l'enseignement du calcul est d'acquérir des automatismes, on ne dit pas que l'enseignement se réduit à la connaissance de ces automatismes. Acquérir un automatisme est un acte, et un acte intellectuel pourrait-on préciser. C'est parce que l'on calcule que l'on a besoin d'acquérir des automatismes et cela l'enseignement dit traditionnel le savait très bien. C'est la réduction des opérations élémentaires à des lois de composition qui a conduit à les distinguer du calcul, mais nous avons déjà rappelé que la notion de loi de composition ne relève pas de l'enseignement élémentaire et que la distinction entre calcul et techniques de calcul est de peu d'intérêt.

L'opposition à la mode aujourd'hui entre le calcul et les techniques de calcul repose sur une erreur grossière qui n'est qu'une forme d'ignorance de ce qu'est le calcul. Parmi les raisons qui ont conduit à cette erreur, nous noterons le rôle des théories de l'apprentissage qui, sous prétexte d'étudier le comportement de l'apprenant, c'est-à-dire de l'élève réduit à l'état de concept ont conduit à occulter les difficultés mathématiques que rencontrent les élèves au cours de l'apprentissage. C'est cela qui a conduit à mettre en avant ce que l'on pourrait appeler des "contraintes didactiques"¹⁴ lesquelles se sont substituées aux contraintes posées par les contenus enseignés, éliminant ainsi le sens de ces contenus¹⁵. Cela ne pouvait que nuire aux élèves.

De l'informatique

Le développement de ce que l'on appelle l'informatique pédagogique a conduit à une nouvelle forme de l'opposition "sens vs techniques". Celle-ci repose sur l'idée que la machine, en débarrassant l'élève de la prise en charge des questions techniques, lui laisse plus de temps pour se consacrer aux aspects conceptuels et par conséquent pour la compréhension du sens, une affirmation pour le moins simpliste qui ignore comment s'acquiert la connaissance. Il faut dire, à la décharge de ceux qui la soutiennent, que cette affirmation se place dans le contexte général de ce que l'on appelle l'informatisation de la société. Si ce n'est pas ici le lieu de développer une critique de cette informatisation, critique qu'il ne faut pas confondre avec une critique de l'informatique, la façon dont s'est développé ce que l'on appelle l'informatique pédagogique ou l'enseignement assisté par ordinateur ou quelques autres noms tout aussi prétentieux, est un bon exemple de la fascination exercée par l'usage des machines.

Pourtant, en ce qui concerne l'apprentissage, l'usage irraisonné de l'informatique aboutit à un remarquable contresens qui prolonge l'opposition proclamée "sens vs techniques".

On reste dans la distinction signalée ci-dessus entre ce qui serait la part noble de l'activité intellectuelle et qui renvoie au sens et la part technique, considérée comme subalterne et inutile à la compréhension, part dont on aimerait se passer, d'autant que, en ce qui concerne l'enseignement, cette part peut apparaître fastidieuse autant pour celui qui enseigne que pour ceux qui sont enseignés. Heureusement la machine est là qui peut libérer de ces tâches subalternes et fastidieuses. Ici encore le manichéisme intellectuel relève plus du discours moralisant que du discours pédagogique.

Comme nous l'avons déjà dit, la maîtrise du calcul s'appuie sur la maîtrise des techniques de calcul et il est difficile de distinguer dans l'activité d'apprentissage et plus généralement dans l'activité scientifique, la part conceptuelle et la part technique.

¹⁴Nous appelons *contraintes didactiques* non les contraintes imposées par l'acte d'enseignement mais les contraintes définies par les didacticiens dans la mise en place de leur "science".

¹⁵Devant cet enseignement insensé, on a inventé la "donation de sens", comme si les savoirs enseignés n'avaient pas de sens. Ainsi le sens est réduit, par ceux-là mêmes qui s'en réclament, à un simple artefact pédagogique.

Donnons un exemple, on demande à un enfant qui sait compter sur ses doigts de calculer $4 + 3$; il pourra, en jouant avec ses doigts, trouver 7 et en même temps qu'il joue avec ses doigts, il maîtrise ce qu'il fait. On pourra ensuite faire des calculs plus compliqués avec des bâchettes ou un boulier. Ici le calcul et la façon de calculer sont liées et il est vain de vouloir les distinguer, encore plus vain de demander à l'enfant de les distinguer.

On peut demander à un élève de collège de calculer $4 + 3$ avec une calculette ; il appuie successivement sur la touche 4, la touche +, la touche 3 et enfin la touche =, ce qui lui permet de lire sur l'écran 7. Si l'élève sait calculer, il aura compris que la machine marche et qu'il sait s'en servir. S'il ne sait pas calculer, il aura vu le fonctionnement d'une machine, mais ne saura pas pour autant calculer. Pour qui sait déjà calculer, la machine permet d'éviter des calculs fastidieux ; elle peut ensuite permettre, via une programmation convenable, de résoudre des problèmes, la programmation étant à la charge de l'utilisateur lorsqu'il s'agit d'enseignement.

Nous donnerons un deuxième exemple avec la représentation graphique des fonctions. Les calculatrices graphiques permettent, une fonction étant donnée, de faire apparaître sur l'écran sa représentation graphique. Mais lorsque, une fonction étant donnée et entrée dans la machine, on appuie sur la touche convenable et que l'on voit un dessin sur l'écran, que voit-on ? Celui qui sait comment on construit le graphe d'une fonction saura de quoi il s'agit et saura lire les propriétés de la fonction sur le graphe ? Mais celui qui ne sait pas construire le graphe d'une fonction ne saura pas lire le dessin et risque de faire quelques contresens. Pour que la construction à la machine prenne sens pour l'utilisateur, il vaut mieux que celui-ci ait déjà construit à la main quelques graphes de fonctions. Il saura alors reconnaître ce qui est en jeu, la correspondance entre la fonction et son graphe, il saura aussi éviter des contresens liés au fait que le dessin n'est qu'une partie du graphe.

On pourrait multiplier les exemples qui montrent que l'usage des machines ne prend sens que pour qui s'est heurté aux aspects techniques, que ceux-ci participent de la compréhension des concepts en jeu¹⁶.

Conclusion

Les remarques ci-dessus montrent combien, dans l'enseignement, une opposition simpliste "sens vs techniques" non seulement n'a pas grand sens, mais elle s'oppose à la compréhension. On peut considérer que cette opposition relève d'un idéal de pureté qui a bien peu à voir avec l'activité scientifique, encore moins avec l'enseignement et l'apprentissage. L'activité intellectuelle n'est jamais pure¹⁷ ; lorsqu'elle prétend le devenir, c'est à la fin d'un long processus qui permet de distinguer les différentes phases de cette activité. Au contraire l'enseignement commence au premier niveau, celui où la distinction n'a pas grand sens ; à vouloir imposer cette distinction au nom de critères idéologiques, on risque de bloquer l'apprentissage, voire de créer des illusions de réussite.

C'est alors cette indistinction qui importe dans l'enseignement, qui importe d'autant plus que l'enseignement est élémentaire. La progression de l'enseignement implique des retours sur ce que l'on a appris, ce qui conduit à des remises en question. Il faut ici tenir compte que, au fur et à mesure que l'on progresse dans un domaine de la connaissance, le regard sur ce domaine se transforme. C'est seulement *a posteriori* que l'on peut distinguer les divers ingrédients qui sont intervenus dans l'apprentissage, que l'on peut comprendre en particulier comment on a été amené à inventer la notion de loi de composition qui permet de libérer les opérations arithmétiques de certains de leurs aspects techniques.

¹⁶Rudolf Bkouche, "Du caractère expérimental des mathématiques (à propos des laboratoires de mathématiques)", *Repères-IREM*, n°70, janvier 2008, p. 33-76 et <http://michel.delord.free.fr/rb/rb-labo.pdf>.

¹⁷Nous parlons ici de pureté au sens intellectuel du terme à l'exclusion de toute connotation morale.

Mais cela demande que l'on pense l'enseignement en termes de progression, ce qui semble oublié depuis longtemps, que l'on sache aussi que la notion de progression ne peut que s'appuyer sur les contraintes de la discipline enseignée. Les difficultés rencontrées par les élèves au cours de leur apprentissage sont des difficultés internes à la discipline et la recherche d'artefacts dits pédagogiques pour contourner ces difficultés est souvent source de nouvelles difficultés pour les élèves, ce que l'on peut appeler des obstacles didactiques.